Trong [toán học](https://vi.wikipedia.org/wiki/To%C3%A1n_h%E1%BB%8Dc" \o "Toán học), một **nhóm (group)** là một [tập hợp](https://vi.wikipedia.org/wiki/T%E1%BA%ADp_h%E1%BB%A3p" \o "Tập hợp) các [phần tử](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%E1%BA%A7n_t%E1%BB%AD_(to%C3%A1n_h%E1%BB%8Dc)" \o "Phần tử (toán học)) được trang bị một [phép toán hai ngôi](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ph%C3%A9p_to%C3%A1n_hai_ng%C3%B4i" \o "Phép toán hai ngôi) kết hợp hai phần tử bất kỳ của tập hợp thành một phần tử thứ ba thỏa mãn bốn điều kiện gọi là [tiên đề](https://vi.wikipedia.org/wiki/Ti%C3%AAn_%C4%91%E1%BB%81" \o "Tiên đề) nhóm, lần lượt là **tính đóng, tính kết hợp, sự tồn tại của phần tử đơn vị và tính khả nghịch**.

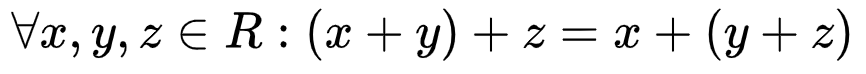
1. Với mọi a, b thuộc G, kết quả của phép toán, a • b, cũng thuộc G
2. Với mọi a, b và c thuộc G, (a • b) • c = a • (b • c).
3. Tồn tại một phần tử e trong G, sao cho đối với mỗi phần tử a thuộc G, phương trình e • a = a • e = a được thỏa mãn.
4. Đối với mỗi a trong G, tồn tại một phần tử b trong G sao cho a • b = b • a = e, với e là phần tử đơn vị.

Kết quả của một phép toán có thể phụ thuộc vào thứ tự thực hiện. Nói cách khác, kết quả của việc kết hợp phần tử a với phần tử b không nhất thiết cho kết quả giống với khi kết hợp phần tử b với phần tử a; phương trình a • b = b • a có thể không phải lúc nào cũng đúng. Phương trình này luôn luôn đúng trong nhóm các số nguyên với phép cộng, bởi vì a + b = b + a đối với hai số nguyên bất kỳ ([tính giao hoán](https://vi.wikipedia.org/wiki/T%C3%ADnh_giao_ho%C3%A1n" \o "Tính giao hoán) của phép cộng). Nhóm mà tính chất giao hoán a • b = b • a luôn đúng được gọi là [nhóm Abel](https://vi.wikipedia.org/wiki/Nh%C3%B3m_Abel" \o "Nhóm Abel) (theo tên của nhà toán học Na Uy [Niels Abel](https://vi.wikipedia.org/w/index.php?title=Niels_Abel&action=edit&redlink=1" \o "Niels Abel (trang chưa được viết))). Với nhóm đối xứng được gọi là phi giao hoán.

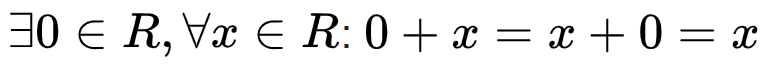
Một tập hợp khác rỗng *R* được gọi là **vành (ring)** nếu trên đó có hai luật hợp thành trong *R* mà ta ký hiệu là "+" (phép cộng) và "×" (phép nhân) thoả mãn các điều kiện sau:

*R* là một nhóm giao hoán đối với phép cộng, nghĩa là:

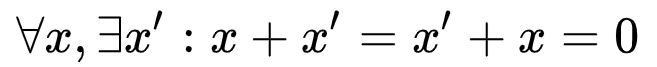
1. Phép cộng có tính kết hợp:

{\displaystyle \forall x,y,z\in R:(x+y)+z=x+(y+z)\,}

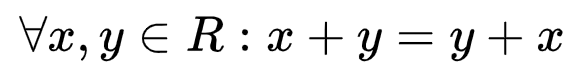
1. Phép cộng có phần tử trung hòa, nghĩa là {\displaystyle \exists 0\in R,\forall x\in R}: {\displaystyle 0+x=x+0=x\,}



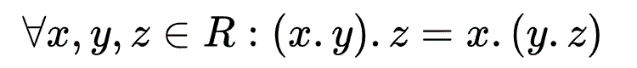
1. Mọi phần tử của *R* có phần tử đối: {\displaystyle \forall x,\exists x':x+x'=x'+x=0}



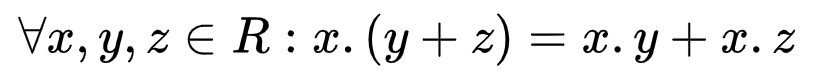
1. Phép cộng có tính giao hoán, nghĩa là: {\displaystyle \forall x,y\in R:x+y=y+x}



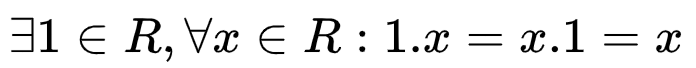
Phép toán nhân có tính chất kết hợp:



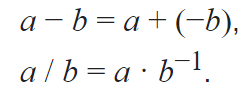
Phép nhân phân phối trên phép cộng:



Phép nhân có phần tử đơn vị:



Về căn bản, một **trường (Field)** là một tập hợp, cùng với hai phép toán được định nghĩa trên tập đó: một phép cộng được viết là *a* + *b*, và một phép nhân được viết là *a* x *b*, cả hai đều có tính chất như với số hữu tỉ và số thực, bao gồm cả sự tồn tại của một nghịch đảo phép cộng *−a* cho mọi phần tử *a*, và một nghịch đảo phép nhân *b*−1 cho mọi phần tử *b* khác 0. Điều này cho ta những phép toán *nghịc đảo* bao gồm phép trừ *a* − *b*, và phép chia *a* / *b*, bằng cách định nghĩa:



**Định nghĩa cổ điển**

Đầy đủ hơn, một trường là một tập F cùng với hai phép toán (còn gọi là luật hợp thành trong) gọi là *phép cộng* và *phép nhân*. Một phép toán là một ánh xạ gán mỗi cặp phần tử trong tập hợp với một phần tử của nó. Kết quả của phép cộng *a* và *b* được gọi là *tổng* của *a* và *b* và ký hiệu là *a* + *b*. Tương tự, kết quả của phép nhân *a* và *b* được gọi là *tích* của *a* và *b*, và ký hiệu bằng *ab* hoặc *a* ⋅ *b*. Các phép toán này cần phai tuân thủ những tính chất sau, được gọi là các tiên đề trường. Trong những tiên đề dưới đây, *a, b* và *c* là những phần tử bất kỳ của trường F. Một trường có hai phép toán là *phép cộng* và *phép nhân*; nó là một nhóm giao hoán dưới phép cộng, với 0 là đơn vị cộng; những phần tử khác 0 tạo thành một nhóm giao hoán dưới phép nhân, với 1 là đơn vị nhân; phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng.

* **Tính kết hợp** của phép cộng và phép nhân:

a + (b + c) = (a + b) + c và a · (b · c) = (a · b) · c.

* **Tính giao hoán** của phép cộng và phép nhân:

*a + b = b + a và a*x*b = b*x*a*.

* **Đơn vị cộng** & **đơn vị nhân**: tồn tại hai phần tử khác nhau 0 và 1 thuộc F sao cho *a + 0 = a và a*x *1 = a.*
* **Nghịch đảo phép cộng**: với mọi a thuộc F, tồn tại một phần tử thuộc F, ký hiệu là *−a*, gọi là nghịch đảo phép cộng của a, sao cho *a + (−a) = 0*.
* **Nghịch đảo phép nhân**: với mọi a ≠ 0 thuộc F, tồn tại một phần tử thuộc F, ký hiệu là *a−1, 1/a, hoặc 1/a*, gọi là nghịch đảo phép nhân của a, sao cho *a*x*a−1 = 1*.
* **Tính phân phối** của phép nhân đối với phép cộng: *a*x *(b + c) = (a*x*b) + (a*x*c)*.

Có hai loại trường hữu hạn. Một loại là trường được hình thành bằng phép cộng và nhân modulo một số nguyên tố. Loại trường hữu hạn khác có một số phần tử là lũy thừa của một số nguyên tố.. Các phần tử của trường có thể được coi là đa thức mà hệ số của nó là các số theo môđun nguyên tố đó. Trong trường hợp đó, phép nhân là phép nhân đa thức, trong đó không chỉ các hệ số là modulo nguyên tố, mà các đa thức modulo là một loại đa thức đặc biệt, được gọi là đa thức ***nguyên thủy*** . Tất cả các trường hữu hạn, đặc biệt là các trường thuộc loại thứ hai này, được gọi là ***trường Galois*** .

**VD**: Trong số học mô đun 12, 9 + 4 = 1 do 9 + 4 = 13 trong **Z**, khi chia cho 12 có [số dư](https://vi.wikipedia.org/wiki/S%E1%BB%91_d%C6%B0" \o "Số dư) là 1. Tuy nhiên, **Z**/12**Z**không phải là một trường do 12 không phải là số nguyên tố.